

INSTYTUT EKONOMIKI ROLNICTWA I GOSPODARKI ŻYWNOŚCIOWEJ
PAŃSTWOWY INSTYTUT BADAWCZY

Agnieszka Natalia Barczak

**WYKORZYSTANIE METODY MNOŻNIKÓW LAGRANGE’A DO
OCENY EFEKTYWNOŚCI PRODUKCJI NA PRZYKŁADZIE
WYBRANYCH GRUP GOSPODARSTW ROLNYCH**

Autoreferat - prezentacja rozprawy doktorskiej przygotowanej pod kierunkiem
dr hab. Grażyny Karmowskiej, prof. ZUT

Recenzenci:

prof. dr hab. Włodzimierz Rembisz

dr hab. Jacek Strojny

Warszawa, lipiec 2012

Uzasadnienie wyboru tematu

Podejmowanie decyzji dotyczących organizacji procesów produkcyjnych w gospodarstwach rolnych jest istotnym zagadnieniem z punktu widzenia efektywności działania. Wpływ na nie ma wiele czynników zarówno ekonomicznych, jak i organizacyjnych. Wszystkie decyzje dotyczące organizacji gospodarstwa powinny wynikać z analizy jego działalności i dążyć do jej ulepszenia.

Pomimo tego, że na procesy produkcyjne w gospodarstwach rolnych mają wpływ również warunki zewnętrzne, o których rolnik nie może decydować, może on próbować podejmować decyzje w oparciu o odpowiednio dobrane metody optymalizacyjne.

Jedną z najważniejszych kwestii istotnych w procesie podejmowania decyzji jest określenie optymalnego poziomu nakładów czynników. Czynniki te są zmienne, ponieważ w miarę zwiększania się ich nakładów, zmieniają się również relacje ekonomiczne i techniczne (związane z ich ograniczonością). Określenie optymalnego nakładu czynników przy zastosowaniu metod optymalizacyjnych nie jest rzeczą prostą. Wynika to z tego, iż najczęściej zależności między produktem a nakładami zmiennych czynników produkcji nie są prostoliniowe. W takich przypadkach, użytecznym narzędziem może być funkcja produkcji. Równie ważna jest analiza wielkości ponoszonych kosztów.

Połączenie funkcji produkcji i funkcji kosztów pozwala na budowę modeli optymalizujących te wielkości ekonomiczne. W tym celu, jako prostsze, najczęściej stosowane są liniowe modele optymalizacyjne. Jednakże, modele programowania liniowego (...) często okazują się niewystarczające w modelowaniu rzeczywistości gospodarczej. Model liniowy jedynie przybliża realną sytuację ekonomiczną. Uzyskanie opisu układu gospodarczego, który adekwatnie odzwierciedlałby rozpatrywane relacje ekonomiczne, wymaga zastosowania modelu uwzględniającego wszystkie jego komplikacje. Taka możliwość pojawiła się z chwilą wprowadzenia innych niż liniowe dziedzin programowania matematycznego [Kukuła 2005]. Dlatego też, w pracy, do optymalnego rozdziału czynników produkcji wykorzystano metodę programowania nieliniowego, którą jest metoda mnożników Lagrange'a. Celem porównania otrzymanych wyników, zastosowano metodę programowania liniowego i metodę DEA. Pozwoliło to na ocenę efektywności produkcji prowadzonej w grupach gospodarstw.

Ze względu na to, że budowane modele nie są stosowane do planowania wieloletniego, czynnik czasu nie odgrywa istotnej roli. W związku z tym, grupy gospodarstw

rolnych traktowane są jako obiekty statyczne z powtarzającą się okresowo, czynną identyfikacją parametrów.

Cel pracy

Głównym celem pracy jest wskazanie skutecznej metody pozwalającej na badanie efektywności produkcji w gospodarstwach rolnych wybranych typów rolniczych.

W oparciu o literaturę przedmiotu i analizę dotychczasowego zastosowania wykorzystanych w pracy metod, postawiono następującą hipotezę badawczą:

Metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a może znaleźć praktyczne zastosowanie do oceny efektywności produkcji w gospodarstwach rolnych wybranych typów rolniczych.

Weryfikacja postawionej hipotezy badawczej zakłada dokonanie oceny wyników otrzymanych z wykorzystaniem metody mnożników Lagrange'a zastosowanej do badania efektywności produkcji w gospodarstwach rolnych wybranych typów rolniczych.

W ten sposób postawiony problem badawczy, cel i hipoteza badawcza determinują układ pracy. Praca składa się ze wstępu, pięciu rozdziałów oraz wniosków.

W rozdziale pierwszym przedstawiono przegląd literatury dotyczący zastosowania funkcji produkcji i funkcji kosztów do badania efektywności produkcji. Opisano istotę modeli produkcji i modeli kosztów, skupiając się głównie na ekonometrycznych aspektach tych zagadnień. Zwrócono uwagę na najczęściej stosowane modele produkcji, szczególny nacisk kładąc na funkcję produkcji typu Cobba-Douglasa.

Rozdział drugi traktuje o problemach, które pojawiają się podczas szacowania funkcji produkcji i funkcji kosztów w gospodarstwach rolnych. Scharakteryzowano model optymalizacji liniowej, jako metodę wyznaczającą optymalne kombinacje nakładów czynników produkcji, który potraktowano jako narzędzie porównawcze. Wskazano również na alternatywne sposoby badania efektywności produkcji, wybierając model DEA oraz metodę wskaźnikową (wskaźnik względnej wysokości kosztów, wskaźnik względnej opłacalności produkcji, wskaźniki wydajności pracy, ziemi i kapitału).

W rozdziale trzecim skupiono się na metodzie nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Przedstawiono jej założenia, metody wyznaczania rozwiązań optymalnych oraz sposób interpretacji wyników. Dokonano także krótkiego przeglądu dotychczasowego wykorzystania metody do badania efektywności produkcji.

W rozdziale czwartym przeprowadzono analizę wybranego do badań makroregionu Polski – Pomorze i Mazury. Ponadto, dokonano krótkiej charakterystyki badanych grup gospodarstw rolnych, podzielonych według typów produkcyjnych.

Rozdział piąty zawiera prezentację wyników zastosowania w grupach gospodarstw optymalizacji liniowej oraz modelu DEA. Przedstawiono tu również wyniki estymacji funkcji produkcji i funkcji kosztów, na podstawie których zbudowano równania wykorzystane do optymalizacji z wykorzystaniem metody mnożników Lagrange'a. Rozdział zakończono analizą porównawczą wybranych metod optymalizacyjnych dla grup gospodarstw. W tym celu wykorzystano metodę wskaźnikową.

Praca została zakończona podsumowaniem i wnioskami wynikającymi z przeprowadzonych badań.

Metodyka badań

Na potrzeby pracy wykorzystano materiały źródłowe, kolejno pochodzące z bazy Głównego Urzędu Statystycznego i Polskiego FADN. Dane GUS uwzględniono przy wyborze makroregionu, na przykładzie którego przeprowadzono dalszą analizę. Celem badania efektywności produkcji grup gospodarstw rolnych według typów rolniczych korzystano z danych udostępnionych przez polski FADN.

Do analizy makroregionu wykorzystano wybrane wielkości ekonomiczne za lata 2004-2008¹. Zaliczono do nich produkcję globalną, końcową i towarową.

Globalna produkcja rolnicza obejmuje [Rocznik statystyczny rolnictwa, 2009]:

- produkcję roślinną, czyli nieprzetworzone produkty pochodzenia roślinnego zebrane w danym roku,
- produkcję zwierzęcą, czyli produkcję żywca rzeźnego oraz nieprzetworzonych produktów pochodzenia zwierzęcego, przyrost pogłowia zwierząt gospodarskich (inwentarza żywego - stada podstawowego i obrotowego); do pogłowia zwierząt gospodarskich zaliczono: bydło, trzodę chlewną, owce, konie i drób,
- produkty pochodzące z własnej produkcji, które zostały zużyte na cele produkcyjne, np. pasze, materiał siewny, obornik.

Dane GUS nie obejmują przetwórstwa rolnego, wartości usług świadczonych poza gospodarstwem oraz usług związanych z inwestycjami i remontami kapitalnymi [Rychlik, Kosieradzki 1976].

¹ Ten sam okres obejmują badania dotyczące grup gospodarstw.

Końcowa produkcja rolnicza przez GUS definiowana jest jako suma wartości produkcji towarowej, spożycia naturalnego produktów rolnych pochodzących z własnej produkcji, przyrostu zapasów produktów roślinnych i zwierzęcych oraz przyrostu wartości pogłowia zwierząt gospodarskich (inwentarza żywego - stada podstawowego i obrotowego).

Towarowa produkcja rolnicza jest sumą sprzedaży produktów rolnych do skupu i na targowiskach. Produkcja towarowa nie obejmuje obrotów między poszczególnymi podmiotami gospodarczymi zaliczonymi do tej samej grupy podmiotów i sprzedaży produktów rolnych przez spółdzielnie produkcji rolniczej członkom tych spółdzielni [Rocznik statystyczny rolnictwa, 2009].

Wstępna analiza przeprowadzona na podstawie danych publikowanych przez GUS pozwoliła stwierdzić, że na obszarze regionu Pomorze i Mazury, w całym przyjętym do badań okresie, zanotowano najmniejsze wartości produkcji globalnej, końcowej i towarowej. W związku z tym, wydało się konieczne przeprowadzenie analizy efektywności gospodarowania oraz analizy procesów produkcyjnych w grupach gospodarstw tego regionu. (rysunek 1).



Rysunek 1. Podział Polski na regiony FADN

Źródło: http://www.fadn.pl/mediacatalog/documents/Wyniki_standard_ogolne2006.pdf.

Przeprowadzona analiza dotyczyła grup gospodarstw podzielonych według typów rolniczych. Typ rolniczy gospodarstwa jest jednym z kryteriów stosowanych przez FADN w klasyfikacji gospodarstw rolnych. Określa się go w oparciu o udział poszczególnych działalności w tworzeniu ogólnej wartości standardowej nadwyżki bezpośredniej (SGM)

gospodarstwa. W zależności od potrzebnego stopnia dokładności, typy rolnicze gospodarstw dzielone są na m.in. [Goraj i inni 2010]:

- 8 typów ogólnych i grupę gospodarstw niesklasyfikowanych (oznaczanych z użyciem jednego znaku),
- 17 typów podstawowych (oznaczanych z użyciem dwóch znaków).

Na potrzeby pracy wybrano osiem typów ogólnych, które przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1. Podział gospodarstw rolnych według typu rolniczego

Oznaczenie grupy zastosowane w pracy	Symbol typu rolniczego	Nazwa typu
1	13, 14	gospodarstwa specjalizujące się w uprawach polowych, m.in.: zboża, oleiste, strączkowe, okopowe, warzywa polowe, tytoń;
2	20	gospodarstwa specjalizujące się w uprawach ogrodniczych, m.in.: warzywa, truskawki, kwiaty, rośliny ozdobne, grzyby;
3	31, 32, 33, 34	gospodarstwa specjalizujące się w uprawach trwałych, m.in.: winogrona, drzewa i krzewy owocowe, orzechy;
4	41, 42, 43, 44	gospodarstwa specjalizujące się w chowie zwierząt żywionych w systemie wypasowym, m.in.: bydło mleczne, bydło opasowe, owce, kozy;
5	50	gospodarstwa specjalizujące się w chowie zwierząt żywionych paszami treściwymi, m.in.: trzoda chlewna, drób;
6	60	różne uprawy, łącznie, m.in.: uprawy polowe, ogrodnicze, trwałe;
7	71, 72	różne zwierzęta, łącznie;
8	81, 82	różne uprawy i zwierzęta, łącznie;

Źródło: opracowanie własne w oparciu o Plan wyboru próby gospodarstw rolnych Polskiego FADN, Osuch D. – kierownik zespołu, Wydawnictwo Polskiego FADN, Warszawa 2004, s. 9-12.

Po dokonaniu wyboru obszaru badań przeprowadzono analizę statystyczną najważniejszych wielkości dotyczących badanych grup gospodarstw. Wykorzystano takie miary, jak: średnia, minimum, maksimum, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności.

Następnie przeprowadzono analizę i przedstawiono graficzny obraz rozwiązań optymalnych, otrzymanych w efekcie optymalizacji produkcji z wykorzystaniem metody programowania liniowego, kombinacji najbardziej efektywnego wykorzystania nakładów – metoda DEA oraz metody mnożników Lagrange’a. Jako optymalne rozpatrywano tylko te wyniki, dla których wartość produkcji była wyższa od wartości rzeczywistej. Wynika to z założenia, zgodnie z którym wartość produkcji jest maksymalizowana.

Metoda programowania liniowego odgrywa ważną rolę w procesie podejmowania optymalnych decyzji. Znajduje ona zastosowanie w planowaniu produkcji, w rozwiązywaniu problemów diety, jak również przy ustalaniu optymalnego poziomu zatrudnienia. Istnieje wiele modeli programowania liniowego, które mogą być efektywnie wykorzystywane w zarządzaniu gospodarstwem rolnym oraz w planowaniu różnego rodzaju działalności [Trzaskalik 1997].

Zagadnienie programowania liniowego ma następującą postać:

$$\begin{aligned}
 & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leq z_1 \\
 \text{warunki ograniczające:} & \dots\dots\dots, \\
 & a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \leq z_k \\
 \text{warunki brzegowe:} & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \\
 \text{funkcja celu:} & c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \max,
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

gdzie:

- a_{ij} - zużycie i - tego środka produkcji do wytworzenia jednej jednostki j - tego produktu
 $i = (1, 2, \dots, k), j = (1, 2, \dots, n)$ (współczynniki techniczno –ekonomiczne),
- k - liczba warunków ograniczających,
- n - liczba wytwarzanych produktów,
- x_j - wielkość produkcji j - tego produktu (zmienne decyzyjne),
- z_i - posiadany zasób i - tego środka produkcji,
- c_j - cena lub zysk jednostkowy ze sprzedaży j - tego produktu (wagi zmiennych decyzyjnych).

Metoda DEA bazuje na programowaniu liniowym, jak również na estymacji granicy efektywności. Służy ona do pomiaru względnej efektywności badanych jednostek w sytuacjach, gdy jednocześnie występuje wiele nakładów i efektów.

Założenie wyjściowe metody DEA odnosi się do koncepcji produktywności (która jest definiowana jako iloraz pojedynczego nakładu i pojedynczego efektu) do sytuacji wielowymiarowej. Dysponując s -efektami i m -nakładami efektywność obiektu przyjmuje postać [Rogowski 1996], [Rusielik 2000]:

$$\text{EFEKTYWNOŚĆ} = \frac{\sum_{r=1}^s u_r \text{EFEKT}_r}{\sum_{i=1}^m v_i \text{NAKŁAD}_i}
 \tag{2}$$

gdzie:

- u_r - wagi określające ważność poszczególnych efektów,

v_i - wagi określające ważność poszczególnych nakładów.

Jedną z cech charakterystycznych modelu DEA jest możliwość sprowadzenia do wielkości syntetycznych m nakładów i s efektów. Pozwala to wyliczyć współczynnik efektywności będący maksymalizowaną funkcją celu w modelu programowania liniowego. Matematyczny zapis modelu wygląda następująco [Czekaj, Ziółkowska 2009]:

$$F(u, v) = \frac{\sum_{r=1}^s u_r y_r}{\sum_{i=1}^m v_i x_i} \rightarrow \max, \quad (3)$$

gdzie dane empiryczne to:

x_i – nakłady,

y_r – efekty.

przy warunkach ograniczających [Rusielik 2000]:

$$\frac{\sum_{r=1}^s u_r y_{rj}}{\sum_{i=1}^m v_i x_{ij}} \leq 1, \text{ dla } j = 0, 1, \dots, n, \text{ oraz } \mathbf{u}_r, \mathbf{v}_i \geq 0. \quad (4)$$

Sformułowane w taki sposób dualne zadanie programowania liniowego rozwiązuje się dla wszystkich badanych obiektów.

Na możliwości zastosowania programowania liniowego i na jego efekty niekorzystnie wpływa konieczność opisywania zależności za pomocą funkcji liniowych. Powoduje to duże uproszczenie rzeczywistości. Wobec tego, niemal od samego początku stosowania metod programowania liniowego zastanawiano się nad możliwością wprowadzania związków nieliniowych pomiędzy zależnościami techniczno-ekonomicznymi. Z ograniczeń tych wynika rozwinięcie dziedziny programowania nieliniowego.

Celem uwzględnienia efektów związanych z występowaniem w zadaniach programowania tzw. nieliniowości, konieczne jest opisywanie modeli układami równań różniczkowych nieliniowych. Aby uwzględnić efekty związane z przestrzennym rozkładem parametrów systemu powinno się wykorzystywać do ich konstrukcji równania różniczkowe cząstkowe. Metodą uwzględniającą te elementy jest metoda mnożników Lagrange'a.

Aby sformułować zadanie programu nieliniowego, rozwiązywane z wykorzystaniem metody mnożników Lagrange'a należy w pierwszej kolejności oszacować funkcje produkcji i funkcje kosztów.

Ze względu na to, że problem decyzyjny określany jest mianem nieliniowego, w przypadku gdy funkcja celu albo chociaż jeden z warunków ograniczających ma postać

funkcji nieliniowej, brano pod uwagę nieliniowe postaci funkcji produkcji. Najlepszym dopasowaniem do danych rzeczywistych charakteryzowały się trzyczynnikowe funkcje produkcji typu Cobba-Douglasa.

Gdy funkcja celu jest funkcją nieliniową (trzyczynnikowa funkcja produkcji typu Cobba-Douglasa), a warunki ograniczające – funkcjami liniowymi (liniowa funkcja kosztów) – można wykorzystać funkcję Lagrange’a – to tzw. metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange’a.

Maksymalizowana jest funkcja produkcji (funkcja celu) postaci: $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ (gdzie X_1, X_2, \dots, X_n są zmiennymi decyzyjnymi) przy następujących warunkach ograniczających:

$$F_i(X_1, X_2, \dots, X_n) \leq b_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \text{ oraz } X_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Zakłada się, że funkcje Y i F_i są funkcjami ciągłymi oraz, że posiadają one pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu. Oprócz tego, funkcja produkcji Y jest rosnącą funkcją zmiennych X_j . Oznacza to, że $\frac{\partial f}{\partial X_j} > 0, (j = 1, 2, \dots, n)$.

W przypadku, gdy warunki bilansowe zadania mają postać równań tworzy się funkcję zmiennych X_j i mnożników λ_i tzw. funkcję Lagrange’a. Ma ona postać:

$$L(X_j, \lambda_i) = f(X_j) - \sum_{i=1}^m \lambda_i [F_i(X_j) - b_i], \quad (5)$$

gdzie: $\sum_{i=1}^m \lambda_i [F_i(X_j) - b_i]$ jest funkcją nakładu środków charakteryzującą stopień użycia środków oraz ich ograniczoność (funkcja kosztów). Funkcja Lagrange’a ma te same wartości (w obszarze rozwiązań dopuszczalnych) co funkcja celu Y .

Wyniki otrzymane z wykorzystaniem metody programowania liniowego, metody DEA oraz metody mnożników Lagrange’a zostały porównane z wykorzystaniem analizy wskaźników efektywności. Ze względu na to, że w literaturze przedmiotu podanych jest wiele wskaźników, na potrzeby pracy wybrano wskaźnik względnej wysokości kosztów (wskaźnik kosztów) oraz wskaźnik opłacalności (wskaźnik względnej opłacalności produkcji). Wskaźnik względnej wysokości kosztów jest to procentowy stosunek kosztów gospodarczych (nakładów) do wartości produkcji (przychodów brutto): $W_c = \frac{C \cdot 100}{V}, \quad (6)$

gdzie:

C - koszty gospodarcze lub inaczej ujęte nakłady,

V - wartość produkcji lub przychodów brutto.

Im wartość wskaźnika jest niższa od 100, tym gospodarstwo (lub produkcja) jest bardziej rentowne, im jest wyższy od 100, tym gospodarstwo jest bardziej deficytowe. Gdy wartość wskaźnika jest równa 100, produkcja nie przynosi zysku ani straty [Rychlik, Kosieradzki 1976], [Kopeć, Nietupski 1980], [Adamowski 1983].

Wskaźnik opłacalności (wskaźnik względnej opłacalności produkcji) - jest to odwrotność poprzedniego wskaźnika, czyli procentowy stosunek wartości produkcji (przychodów brutto) do kosztów gospodarczych (nakładów): $W_o = \frac{V \cdot 100}{C}$. (7)

Im wskaźnik jest wyższy od 100, tym gospodarstwo (lub produkcja) jest bardziej rentowne, im jest niższy od 100 - tym bardziej deficytowe. Gdy wartość wskaźnika jest równa 100, produkcja nie przynosi zysku ani straty [Rychlik, Kosieradzki 1976], [Kopeć, Nietupski 1980], [Manteuffel 1981], [Adamowski 1983].

Do powyższej grupy zaliczono również wskaźniki wydajności pracy, ziemi i kapitału. Wynika to z tego, że nakłady te należą do badanych czynników produkcji, mających wpływ na jej wartość. Ponadto, „badanie relacji między wynikami produkcyjnymi rolnictwa a zasobami czynników produkcji zaangażowanymi w procesie wytwórczym, to jedna z podstawowych metod ekonomicznej oceny wyników gospodarowania” [Rychlik 1977].

Wskaźnik wydajności pracy wyznacza się na podstawie wzoru [Rychlik, Kosieradzki 1976], [Rychlik 1977], [Manteuffel 1981]: $W_L = \frac{V}{L}$, (8)

gdzie:

L - nakład pracy żywej

Wydajność pracy jest najczęściej stosowanym wskaźnikiem sprawności techniczno-ekonomicznej we wszystkich gałęziach gospodarki narodowej. Oznacza ona wartość produkcji przypadającą na jednostkę pracy zużytej do uzyskania produkcji.

Wskaźnik wydajności ziemi wyznacza się na podstawie wzoru: $W_A = \frac{V}{A}$, (9)

gdzie:

A - powierzchnia użytków rolnych

Jest to stosunek produkcji gospodarstwa do powierzchni użytków rolnych. Wydajność ziemi jest tym większa, im więcej produkcji rolniczej uzyskuje się z 1 ha użytków rolnych.

Wskaźnik wydajności kapitału wyznacza się na podstawie wzoru: $W_K = \frac{V}{K}$, (10)

gdzie:

K - nakład kapitału

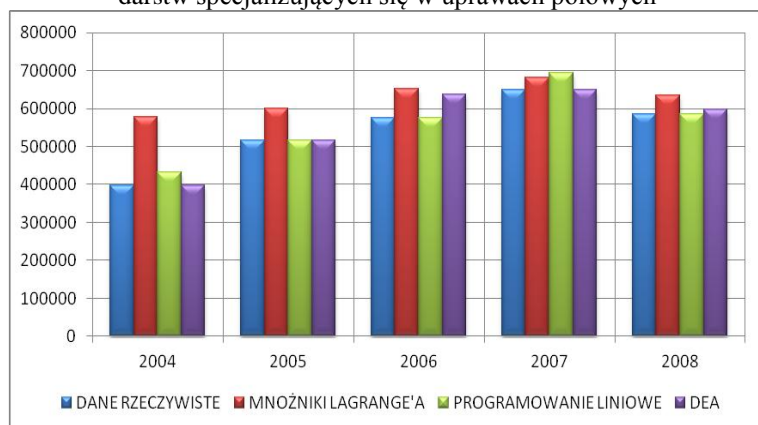
Jest to stosunek wartości produkcji do wartości kapitału zaangażowanego w gospodarstwie rolnym.

Najważniejsze wyniki badań

Na wykresach 1-4 przedstawiono porównanie rzeczywistej wielkości produkcji z wynikami otrzymanymi z wykorzystaniem metody mnożników Lagrange'a, metody programowania liniowego oraz metody DEA dla wybranych typów gospodarstw.

W grupie gospodarstw specjalizujących się w uprawach

Wykres 1. Porównanie danych rzeczywistych z wynikami otrzymanymi w wyniku przeprowadzonych obliczeń dla grupy gospodarstw specjalizujących się w uprawach polowych



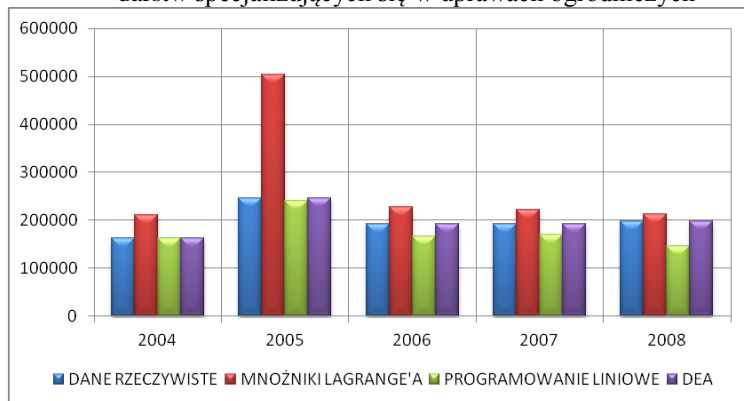
Źródło: opracowanie własne.

W przypadku gospodarstw specjalizujących się w uprawach ogrodniczych, w całym badanym okresie, metoda mnożników Lagrange'a wygenerowała wartości produkcji wyższe od rzeczywistych (od 6,81% w 2008 roku do 104,17% w 2005 roku). Metoda programowania liniowego tylko w roku 2004 pozwoliła otrzymać produkcję wyższą od rzeczywistej – o 0,41%. Wyniki uzyskane z wykorzystaniem metody DEA, w całym badanym okresie kształtowały się na takim samym poziomie, jak wartości rzeczywiste (wykres 2).

Dla grupy gospodarstw prowadzących łącznie różne uprawy tylko w 2006 roku metoda mnożników Lagrange'a nie pozwoliła na otrzymanie wartości produkcji wyższej od rzeczywistej (niższa o 17,14%). W pozostałych okresach była ona wyższa (od 15,62% w roku 2005 do 36,32% w roku 2004). Metoda programowania liniowego wygenerowała wartości wyższe od rzeczywistych w roku 2004 – 0,18% i 2008 – 0,10%. W pozostałych okresach była ona niższa. Metoda DEA wygenerowała wartość produkcji wyższą od rzeczywistej w latach

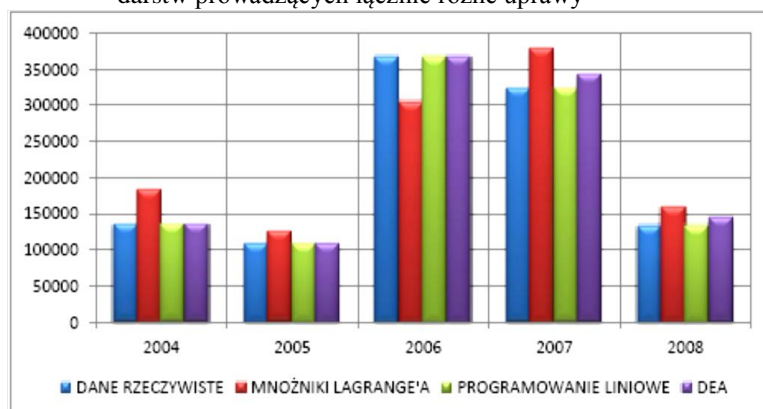
2007-2008. W pozostałym okresie pozostaje ona na poziomie danych rzeczywistych (wykres 3).

Wykres 2. Porównanie danych rzeczywistych z wynikami otrzymanymi w wyniku przeprowadzonych obliczeń dla grupy gospodarstw specjalizujących się w uprawach ogrodniczych



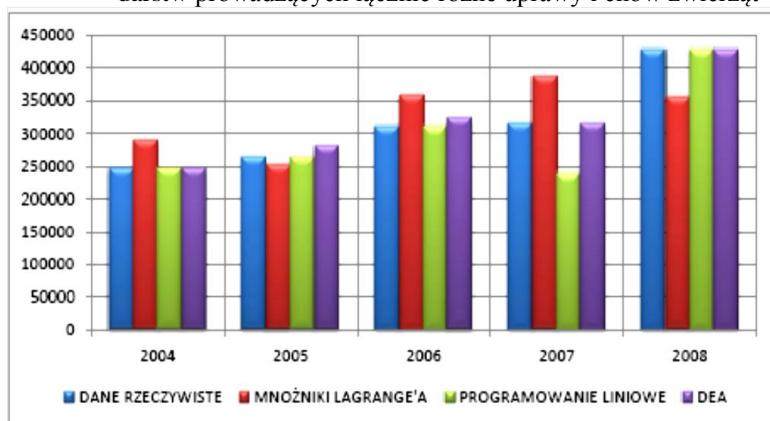
Źródło: opracowanie własne.

Wykres 3. Porównanie danych rzeczywistych z wynikami otrzymanymi w wyniku przeprowadzonych obliczeń dla grupy gospodarstw prowadzących łącznie różne uprawy



Źródło: opracowanie własne.

Wykres 4. Porównanie danych rzeczywistych z wynikami otrzymanymi w wyniku przeprowadzonych obliczeń dla grupy gospodarstw prowadzących łącznie różne uprawy i chów zwierząt



Źródło: opracowanie własne.

Również w przypadku gospodarstw prowadzących łącznie różne uprawy i chów zwierząt, najwyższe wartości produkcji otrzymano wykorzystując metodę mnożników Lagrange'a. Jedynie w roku 2005 i 2008 były one niższe od rzeczywistych (odpowiednio o 4,29% i 16,93%). Metoda programowania liniowego w latach 2005-2007 wygenerowała wyniki niższe, a w pozostałych okresach niewiele wyższe od rzeczywistych – 0,01% w roku 2004 i 0,05% w roku 2008. Metoda DEA pozwoliła na uzyskanie produkcji wyższej od rzeczywistej w latach 2005-2006. W pozostałych okresach wartości były identyczne jak rzeczywiste (wykres 4).

Otrzymane wyniki zostały porównane z wykorzystaniem omówionej wcześniej analizy wskaźnikowej. W tabeli 2 przedstawiono porównanie uzyskanych wartości wskaźników dla danych rzeczywistych oraz wszystkich metod zastosowanych w pracy. Znakiem „+” oznaczono tą metodę, której zastosowanie pozwoliło na uzyskanie najlepszej wartości badanego wskaźnika.

Tabela 2. Porównanie wartości otrzymanych wskaźników dla danych rzeczywistych, metody mnożników Lagrange’a, metody programowania liniowego i metody DEA

okres/ grupa	WZGLĘDNA WYSOKOŚĆ KOSZTÓW				OPŁACALNOŚĆ				WYDAJNOŚĆ PRACY				WYDAJNOŚĆ ZIEMI				WYDAJNOŚĆ KAPITAŁU			
	R	ML	PL	DEA	R	ML	PL	DEA	R	ML	PL	DEA	R	ML	PL	DEA	R	ML	PL	DEA
2004-1	+				+				+				+					+		
2004-2	+				+				+				+						+	
2004-3	+				+					+			+						+	
2004-4	+				+				+				+				+		+	+
2004-5	+				+				+				+						+	
2004-6	+				+					+			+				+		+	+
2004-7	+				+				+				+			+			+	
2004-8	+				+				+					+					+	
2005-1	+				+				+				+				+		+	+
2005-2	+				+					+			+			+			+	
2005-3	+				+					+			+						+	
2005-4	+				+				+				+				+		+	+
2005-5	+				+				+				+						+	
2005-6	+				+				+				+						+	
2005-7	+				+				+				+			+			+	
2005-8	+			+	+			+	+			+			+				+	+
2006-1	+				+					+			+						+	+
2006-2	+				+				+				+				+		+	+
2006-3	+				+					+			+						+	
2006-4	+				+				+				+			+			+	+
2006-5	+				+				+				+						+	
2006-6	+			+	+			+	+				+			+			+	+
2006-7	+				+				+				+			+			+	+
2006-8	+				+				+				+			+			+	+
2007-1	+		+		+		+		+				+						+	
2007-2	+				+				+				+						+	
2007-3	+				+				+				+						+	
2007-4	+				+				+				+						+	
2007-5	+				+				+				+						+	
2007-6	+				+					+			+						+	
2007-7	+				+				+				+			+			+	+
2007-8	+				+					+			+				+		+	+
2008-1	+				+					+			+						+	+
2008-2	+				+				+				+						+	+
2008-3	+				+					+			+				+		+	+
2008-4	+				+				+				+						+	+
2008-5	+				+				+				+						+	
2008-6	+				+					+			+						+	+
2008-7	+				+				+				+			+			+	+
2008-8	+				+				+				+			+			+	+

gdzie: R - dane rzeczywiste, ML - metoda mnożników Lagrange’a, PL - Metoda programowania liniowego
Źródło: opracowanie własne.

Podsumowanie i wnioski

Gospodarstwo rolne jest systemem złożonym. Analiza wielkości nakładów i efektów produkcji oraz sprzężeń zachodzących pomiędzy nimi jest zadaniem skomplikowanym. Konieczna jest tu nie tylko szeroka wiedza ekonomiczna i matematyczna, lecz również znajomość procesów produkcyjnych zachodzących w gospodarstwach rolnych.

Modele matematyczne produkcji gospodarstwa rolnego powinny ujmować podstawowe cechy produkcji roślinnej i zwierzęcej. W wyniku ich rozwiązania powinien zostać uzyskany optymalny podział nakładów tak, aby w wyniku ich zastosowania otrzymać optymalną wielkość produkcji. W związku z tym, ustalony został cel główny pracy.

Na podstawie rozważań teoretycznych oraz badań empirycznych przeprowadzonych w pracy, wyciągnięte zostały następujące wnioski:

1. W badanych grupach gospodarstw rolnych, funkcja kosztów najczęściej przyjmuje postać liniowej funkcji regresji wielorakiej, a funkcja produkcji formę trzyczynnikowej funkcji typu Cobba-Douglasa.
2. Wszystkie oszacowane na potrzeby pracy funkcje charakteryzują się właściwym stopniem dopasowania. Jedynie współczynniki zmienności losowej przyjmują wysokie wartości. Wynika to z dużego zróżnicowania badanych grup gospodarstw rolnych.
3. Przeprowadzona analiza pozwoliła na wskazanie metody pozwalającej na badanie efektywności produkcji w badanych grupach gospodarstw rolnych. Jest to metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Jej zastosowanie w praktyce może być pomocne w optymalizacji produkcji gospodarstw rolnych według typów rolniczych.
4. Mając na uwadze wartości wskaźnika względnej wysokości kosztów oraz wskaźnika opłacalności można zauważyć, że największą efektywnością charakteryzowały się wyniki uzyskane z wykorzystaniem metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. W przypadku tych wskaźników, dane rzeczywiste oraz pozostałe metody (metoda programowania liniowego i metoda DEA) były mniej efektywne niż w przypadku metody mnożników Lagrange'a.
5. Wartości wskaźnika wydajności pracy i wydajności ziemi wskazują, że najbardziej efektywne są wyniki otrzymane z wykorzystaniem metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a. Pozostałe metody wykazały małą wydajność nakładów pracy i ziemi.

6. W przypadku wskaźnika wydajności kapitału, najbardziej efektywne są wielkości wyznaczone z wykorzystaniem metody DEA. Metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a uplasowała się na drugim miejscu.

W związku z powyższym, hipoteza badawcza: „Metoda nieoznaczonych mnożników Lagrange'a może znaleźć praktyczne zastosowanie do oceny efektywności produkcji w gospodarstwach rolnych wybranych typów rolniczych” została potwierdzona. Analiza procesów produkcyjnych, z wykorzystaniem metody nieoznaczonych mnożników Lagrange'a może być stosowana do oceny efektywności produkcji w gospodarstwach rolnych wszystkich typów rolniczych. Warunkiem otrzymania właściwych wyników jest przeprowadzenie optymalizacji z wykorzystaniem modeli statycznych, obejmujących grupy gospodarstw z jak najmniejszym zróżnicowaniem.

Spis treści rozprawy doktorskiej

WSTĘP	3
1. WYKORZYSTANIE FUNKCJI PRODUKCJI DO BADANIA EFEKTYWNOŚCI PRODUKCJI	6
1.1. Przegląd zastosowań modeli produkcji i modeli kosztów w rolnictwie.....	6
1.2. Funkcja produkcji rolniczej.....	13
1.3. Funkcja kosztów.....	27
2. WYKORZYSTANIE METOD OPTYMALIZACYJNYCH DO BADANIA EFEKTYWNOŚCI PRODUKCJI	44
2.1. Problemy modelowania procesów produkcyjnych w gospodarstwach rolnych	44
2.2. Model optymalizacji liniowej.....	65
2.3. Elementy badania efektywności produkcji.....	74
3. METODA NIEOZNACZONYCH MNOŻNIKÓW LAGRANGE’A	85
3.1. Istota funkcji Lagrange’a.....	85
3.2. Wykorzystanie metody mnożników Lagrange’a do badania efektywności produkcji.....	94
4. CHARAKTERYSTYKA BADANYCH OBIEKTÓW	98
4.1. Analiza wybranego makroregionu Polski.....	98
4.2. Charakterystyka gospodarstw według typów rolniczych.....	105
5. OCENA EFEKTYWNOŚCI GOSPODARSTW ROLNYCH	141
5.1. Wyniki optymalizacji liniowej i badania efektywności z wykorzystaniem metody DEA.....	141
5.2. Wyniki estymacji funkcji produkcji rolniczej i modeli kosztów.....	149
5.3. Zastosowanie metody mnożników Lagrange’a.....	172
5.4. Analiza porównawcza wybranych metod badania efektywności.....	184
WNIOSKI	204
LITERATURA	207
SPIS TABEL	222
SPIS WYKRESÓW	226
SPIS RYSUNKÓW	228
ANEKS	229